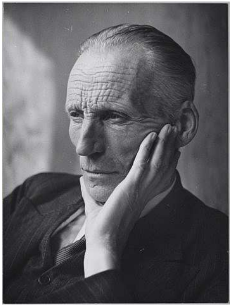
Jean-Christophe San Saturnino

Brouwer: le Dr Jekyll et Mr Hyde des mathématiques

jeudi 21 avril 2022



Plan

- Quelques repères biographiques

Plan

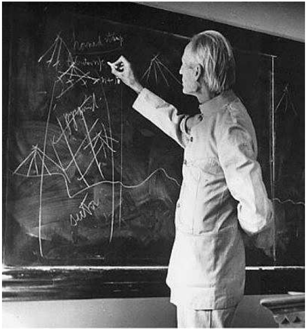
- Quelques repères biographiques
- Théorème du point fixe et applications

Plan

- Quelques repères biographiques
- Théorème du point fixe et applications
- Intuitionnisme et principe du tiers-exclu

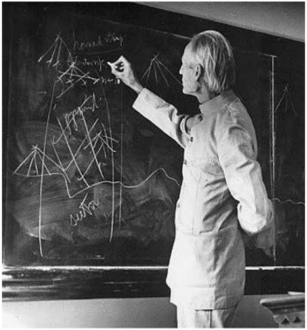
Quelques repères biographiques

- 1881 : Naissance le 27 février à Overschie (Pays-Bas)



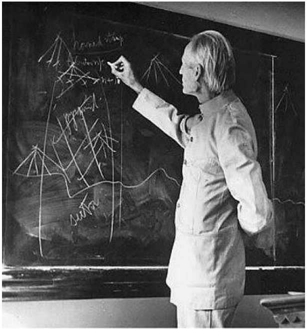
Quelques repères biographiques

- 1881 : Naissance le 27 février à Overschie (Pays-Bas)
- 1897 : Étude des mathématiques à l'université d'Amsterdam



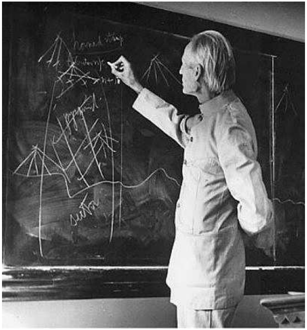
Quelques repères biographiques

- 1881 : Naissance le 27 février à Overschie (Pays-Bas)
- 1897 : Étude des mathématiques à l'université d'Amsterdam
- 1905 : Publication de *Vie, art et mysticisme*



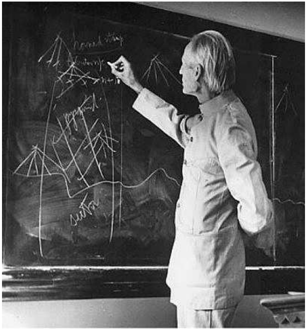
Quelques repères biographiques

- 1881 : Naissance le 27 février à Overschie (Pays-Bas)
- 1897 : Étude des mathématiques à l'université d'Amsterdam
- 1905 : Publication de *Vie, art et mysticisme*
- 1907 : docteur en mathématiques



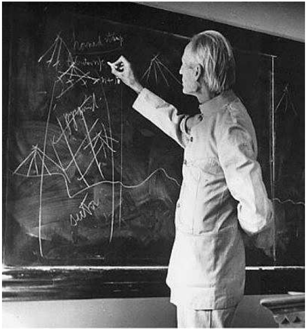
Quelques repères biographiques

- 1881 : Naissance le 27 février à Overschie (Pays-Bas)
- 1897 : Étude des mathématiques à l'université d'Amsterdam
- 1905 : Publication de *Vie, art et mysticisme*
- 1907 : docteur en mathématiques
- 1909 : rencontre à Paris avec Hadamard, Poincaré et Borel



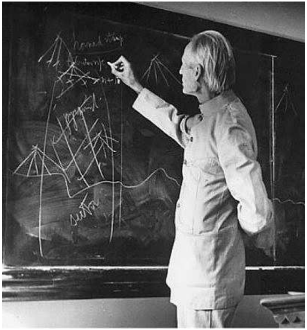
Quelques repères biographiques

- 1911 : théorème du point fixe



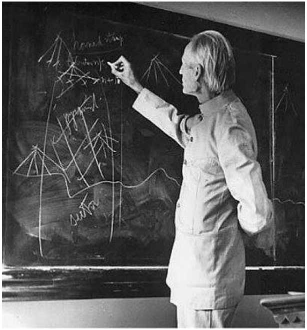
Quelques repères biographiques

- 1911 : théorème du point fixe
- 1912 : nomination en tant que professeur à l'université d'Amsterdam. Cours inaugural : *Intuitionnisme et formalisme*



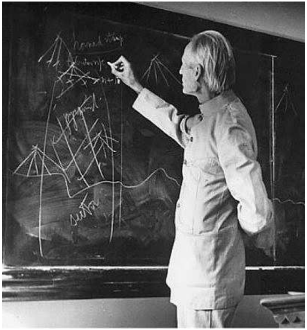
Quelques repères biographiques

- 1911 : théorème du point fixe
- 1912 : nomination en tant que professeur à l'université d'Amsterdam. Cours inaugural : *Intuitionnisme et formalisme*
- 1928 : exclu du conseil éditorial des *Mathematische Annalen* par Hilbert



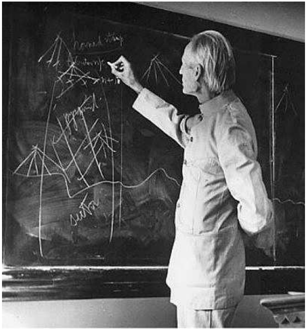
Quelques repères biographiques

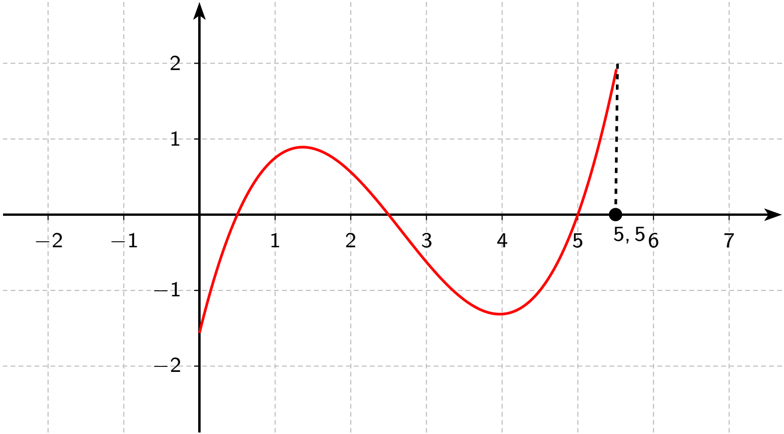
- 1911 : théorème du point fixe
- 1912 : nomination en tant que professeur à l'université d'Amsterdam. Cours inaugural : *Intuitionnisme et formalisme*
- 1928 : exclu du conseil éditorial des *Mathematische Annalen* par Hilbert
- 1934 : Parution du premier numéro de *Compositio Mathematica*. Exclu pour son indulgeante neutralité envers l'occupant nazi



Quelques repères biographiques

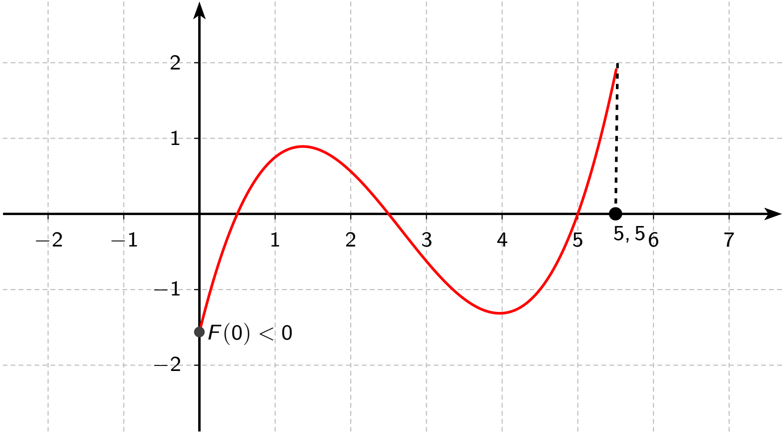
- 1911 : théorème du point fixe
- 1912 : nomination en tant que professeur à l'université d'Amsterdam. Cours inaugural : *Intuitionnisme et formalisme*
- 1928 : exclu du conseil éditorial des *Mathematische Annalen* par Hilbert
- 1934 : Parution du premier numéro de *Compositio Mathematica*. Exclu pour son indulgeante neutralité envers l'occupant nazi
- 1966 : Décès le 2 décembre à Blaricum.

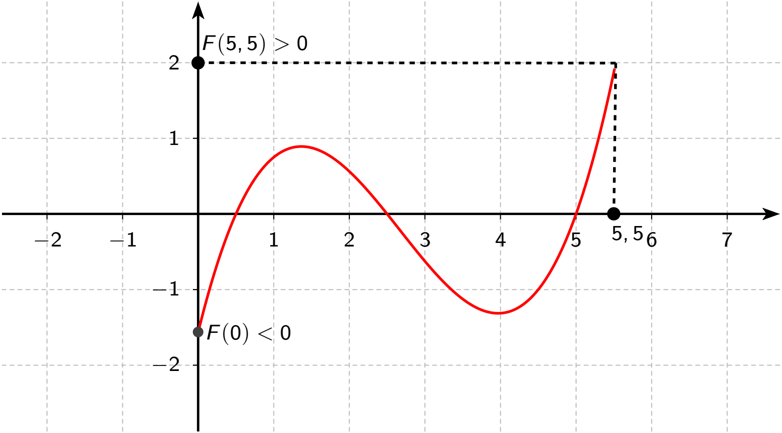


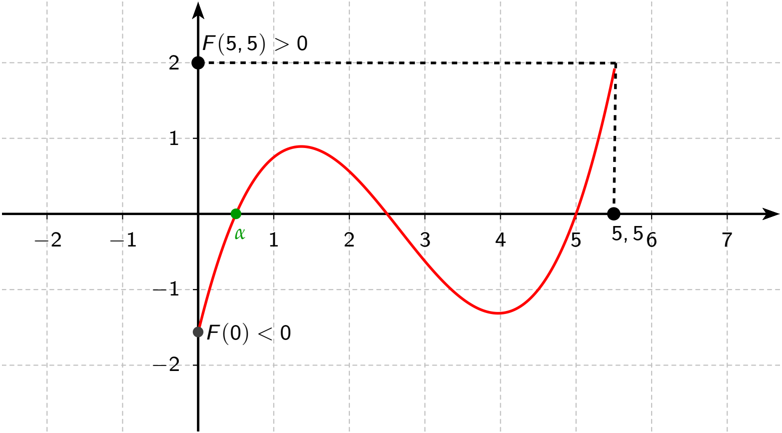

2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
3
4
5
5, 5
6
7

Théorème du point fixe et applications

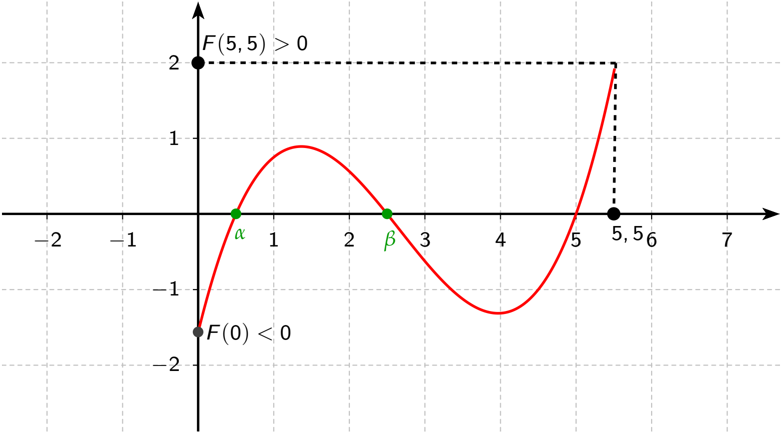
Le théorème des valeurs intermédiaires




$F(5,5) > 0$
2
1
-2
-1
1
2
3
4
5
$5,5$
6
7
-1
$F(0) < 0$
-2

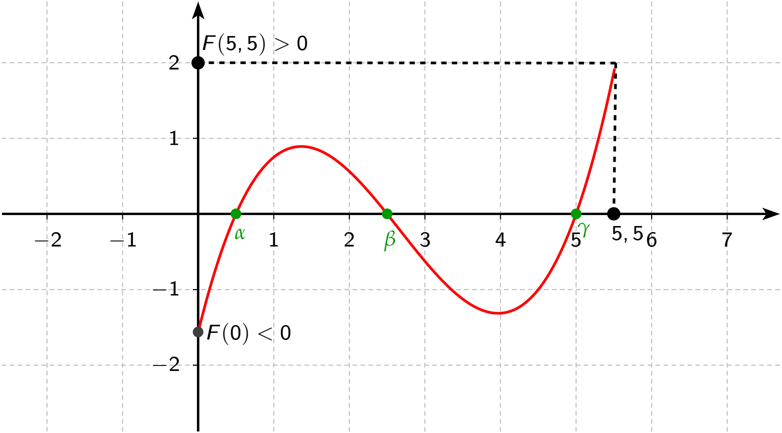

$F(5,5) > 0$
$F(0) < 0$
α
$5,5$
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
2
1
-1
-2

Théorème du point fixe et applications
Le théorème des valeurs intermédiaires



Théorème du point fixe et applications

Le théorème des valeurs intermédiaires



- F continue sur $[a, b]$

- F continue sur $[a, b]$
- $F(a) \leqslant 0$ et $F(b) \geqslant 0$ (ou $F(a) \geqslant 0$ et $F(b) \leqslant 0$)

- F continue sur $[a, b]$
- $F(a) \leqslant 0$ et $F(b) \geqslant 0$ (ou $F(a) \geqslant 0$ et $F(b) \leqslant 0$)
- Il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$

- Soit f définie sur $[a, b]$, à valeur dans $[a, b]$ et continue

- Soit f définie sur $[a, b]$, à valeur dans $[a, b]$ et continue
- Notons $F(x) = f(x) - x$ alors F est continue sur $[a, b]$

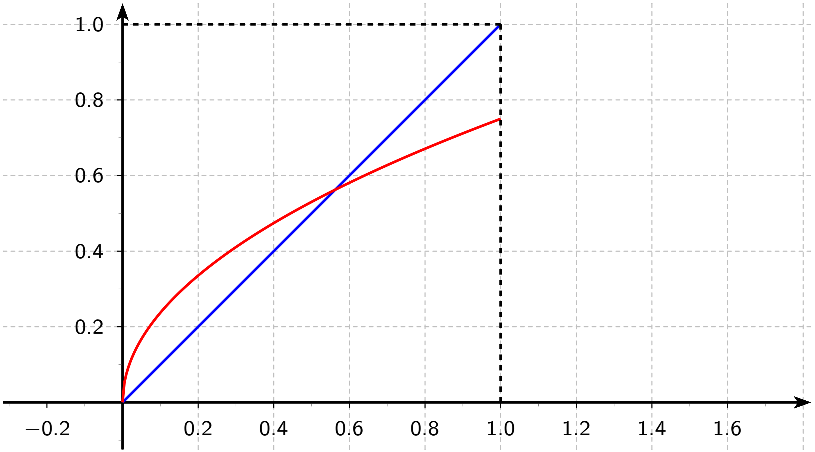
- Soit f définie sur $[a, b]$, à valeur dans $[a, b]$ et continue
- Notons $F(x) = f(x) - x$ alors F est continue sur $[a, b]$
- $F(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $F(b) = f(b) - b \leqslant 0$

- Soit f définie sur $[a, b]$, à valeur dans $[a, b]$ et continue
- Notons $F(x) = f(x) - x$ alors F est continue sur $[a, b]$
- $F(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $F(b) = f(b) - b \leqslant 0$
- Il existe donc $\alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$

- Soit f définie sur $[a, b]$, à valeur dans $[a, b]$ et continue
- Notons $F(x) = f(x) - x$ alors F est continue sur $[a, b]$
- $F(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $F(b) = f(b) - b \leqslant 0$
- Il existe donc $\alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$
- α est un point fixe de f

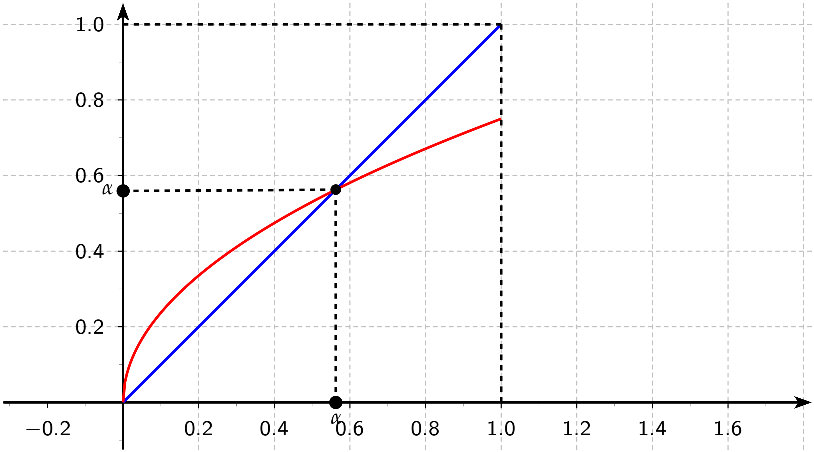
Théorème du point fixe et applications

Application à $u_{n+1} = f(u_n)$

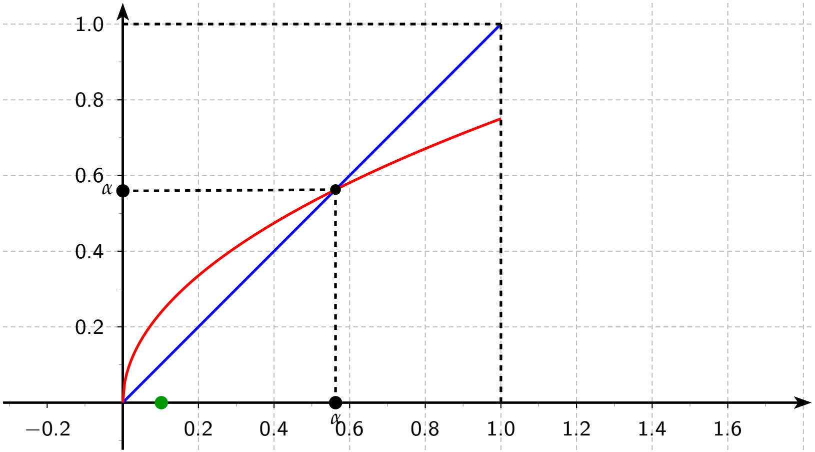


Théorème du point fixe et applications

Application à $u_{n+1} = f(u_n)$

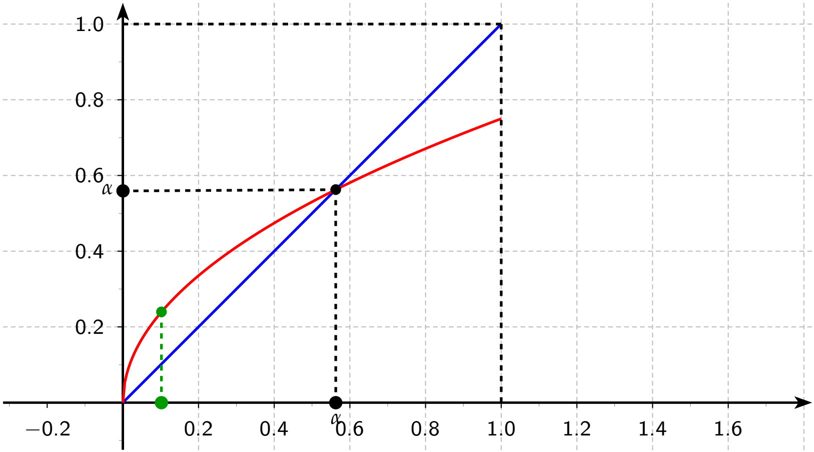


Théorème du point fixe et applications
Application à $u_{n+1} = f(u_n)$

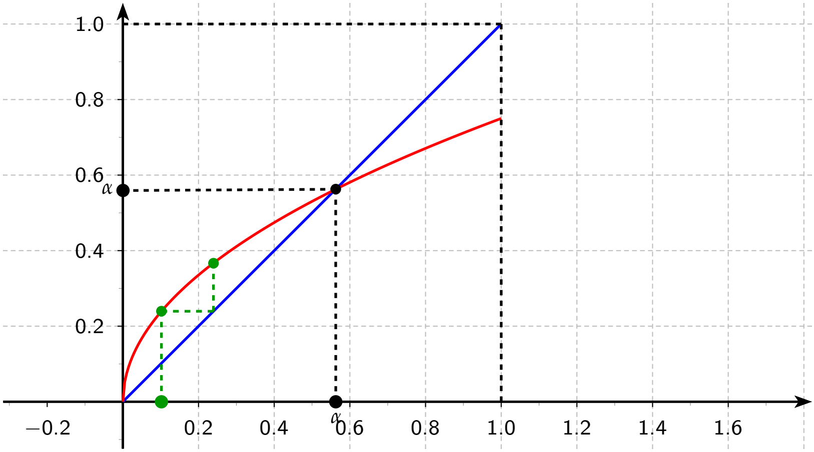


Théorème du point fixe et applications

Application à $u_{n+1} = f(u_n)$

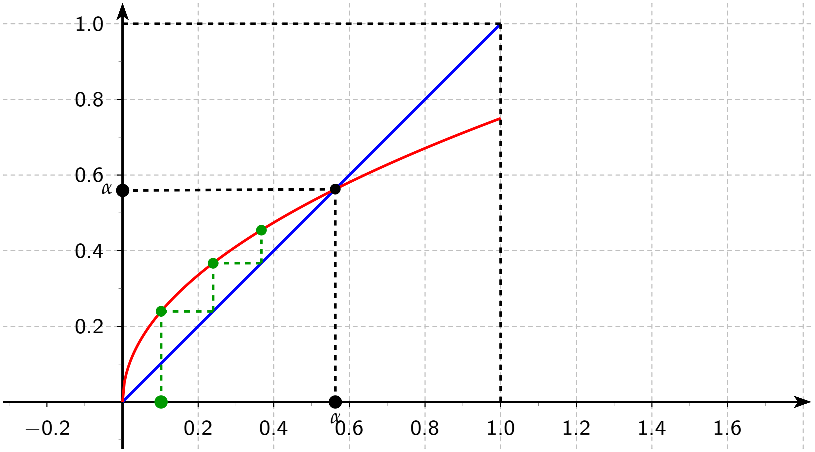


Théorème du point fixe et applications
Application à $u_{n+1} = f(u_n)$



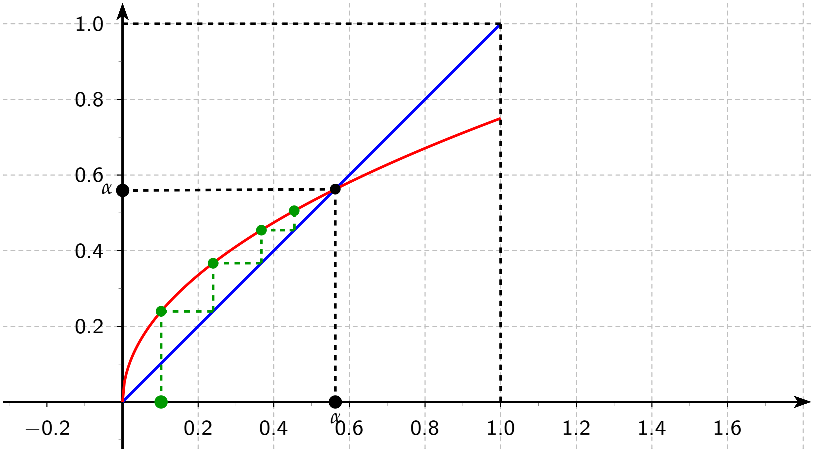
Théorème du point fixe et applications

Application à $u_{n+1} = f(u_n)$



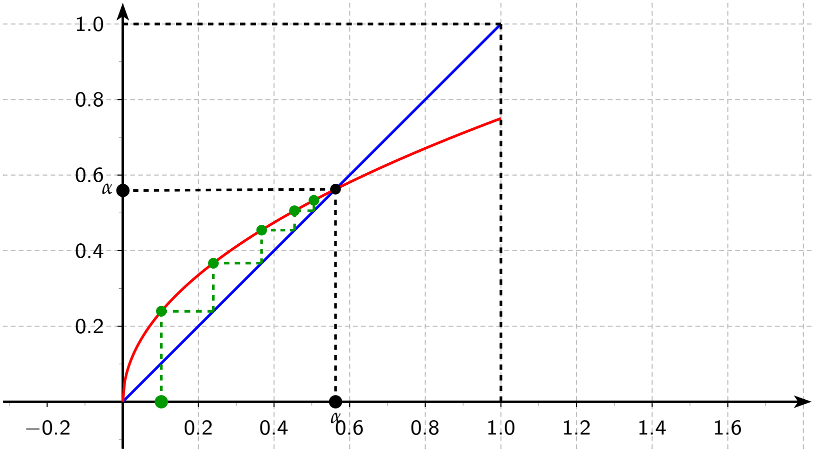
Théorème du point fixe et applications

Application à $u_{n+1} = f(u_n)$



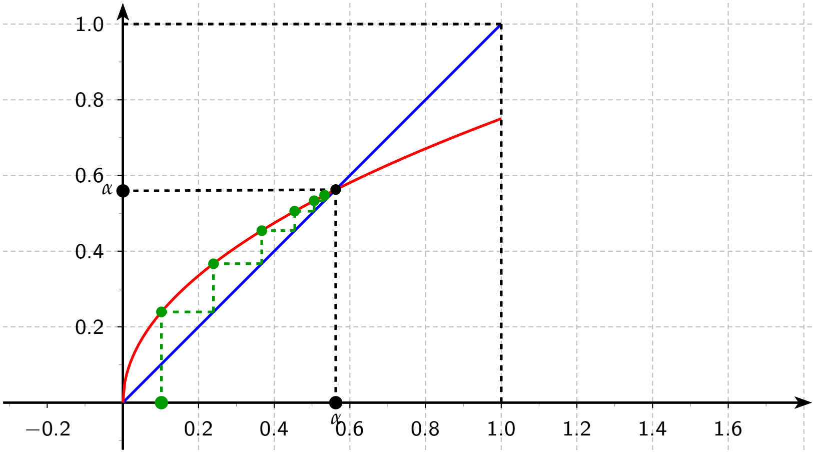
Théorème du point fixe et applications

Application à $u_{n+1} = f(u_n)$



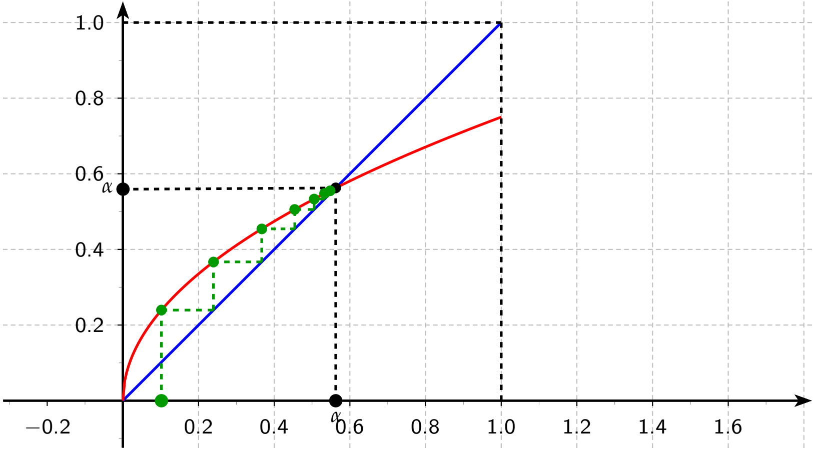
Théorème du point fixe et applications

Application à $u_{n+1} = f(u_n)$



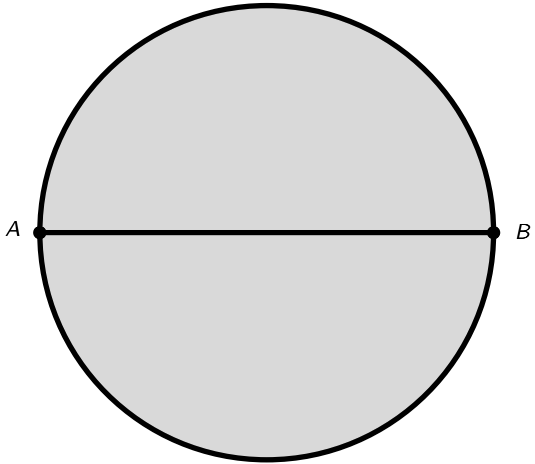
Théorème du point fixe et applications

Application à $u_{n+1} = f(u_n)$

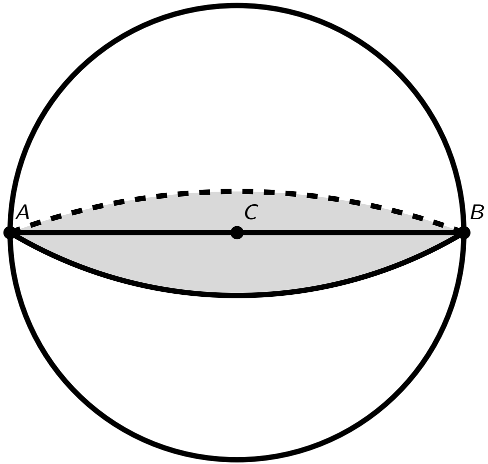


En dimension 2, un segment devient un disque (fermé).

En dimension 2, un segment devient un disque (fermé).



En dimension 3, un disque (fermé) devient une boule (fermée).

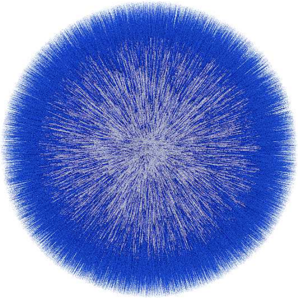


Théorème (du point fixe de Brouwer)

Toute fonction continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Théorème

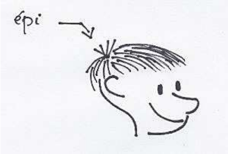
Tout champ de vecteurs continu sur une sphère de dimension paire s'annule une fois au moins.



Théorème du point fixe et applications

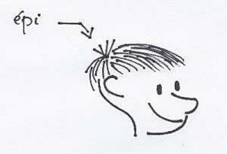
Applications du théorème de la boule chevelue

- Si l'on veut peigner des cheveux sur une tête (assimilée à une sphère), il y aura toujours un épi !

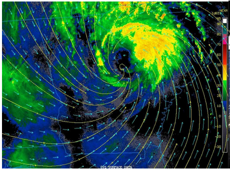


Théorème du point fixe et applications
Applications du théorème de la boule chevelue

- Si l'on veut peigner des cheveux sur une tête (assimilée à une sphère), il y aura toujours un épi !



- Le vent sur la surface de la Terre se modélise à l'aide d' un champ de vecteurs continu. Le thèorème nous dit que quelque part sur Terre, il existe un endroit sans vent ! Ceci correspond par exemple à l'œil d'un cyclone.




- Un jeu est constitué de joueurs

Théorème du point fixe et applications

Équilibre de Nash

- Un jeu est constitué de joueurs
- Chaque joueur choisi une stratégie

- Un jeu est constitué de joueurs
- Chaque joueur choisi une stratégie
- Les stratégies sont en nombre fini et permmettent chacune d'obtenir un gain

Théorème du point fixe et applications
Équilibre de Nash

- Un jeu est constitué de joueurs
- Chaque joueur choisi une stratégie
- Les stratégies sont en nombre fini et permmettent chacune d'obtenir un gain
- Un *équilbre de Nash* est une combinaison de stratégies où chaque joueur maximise son gain en fonction des choix des autres et ne change plus de stratégie

Théorème du point fixe et applications
Équilibre de Nash

- Un jeu est constitué de joueurs
- Chaque joueur choisi une stratégie
- Les stratégies sont en nombre fini et permmettent chacune d'obtenir un gain
- Un *équilbre de Nash* est une combinaison de stratégies où chaque joueur maximise son gain en fonction des choix des autres et ne change plus de stratégie
- Un équilibre de Nash peut être vu comme un point fixe pour une fonction donnée.

Théorème (de Nash)

Tout jeu fini en stratégies mixtes admet un équilibre de Nash

Exemple d'équilibre de Nash : la crise des missiles de Cuba

USA \ URSS	rappel	maintien
blocus	$(0, 0)$	$(-2, 1)$
frappe	$(1, -2)$	$(-8, -8)$

USA \ URSS	rappel	maintien
blocus	$(0, 0)$	$(-2, 1)$
frappe	$(1, -2)$	$(-8, -8)$

USA \ URSS	rappel	maintien
blocus	$(0,0)$	$(-2,1)$
frappe	$(1,-2)$	$(-8,-8)$

URSS / USA	rappel	maintien
blocus	$(0, 0)$	$(-2, 1)$
frappe	$(1, -2)$	$(-8, -8)$

URSS / USA	rappel	maintien
blocus	$(0,0)$	$(-2,1)$
frappe	$(1,-2)$	$(-8,-8)$

- Plusieurs équilibre de Nash sont possibles mais pas toujours optima.

- Plusieurs équilibre de Nash sont possibles mais pas toujours optima.
- Les équilibres sont parfois surprenants :

- Plusieurs équilibre de Nash sont possibles mais pas toujours optima.
- Les équilibres sont parfois surprenants :
    - On peut modéliser la guerre froide en terme de théorie des jeux

Théorème du point fixe et applications
Exemple d'équilibre de Nash : la crise des missiles de Cuba

- Plusieurs équilibre de Nash sont possibles mais pas toujours optima.
- Les équilibres sont parfois surprenants :
  - On peut modéliser la guerre froide en terme de théorie des jeux
  - Les stratégies sont l'attaque, l'armement nucléaire ou l'immobilisme

- Plusieurs équilibre de Nash sont possibles mais pas toujours optima.
- Les équilibres sont parfois surprenants :
  - On peut modéliser la guerre froide en terme de théorie des jeux
  - Les stratégies sont l'attaque, l'armement nucléaire ou l'immobilisme
  - Un des équilibres est que les deux pays s'arment

Théorème du point fixe et applications
Exemple d'équilibre de Nash : la crise des missiles de Cuba

- Plusieurs équilibre de Nash sont possibles mais pas toujours optima.
- Les équilibres sont parfois surprenants :
  - On peut modéliser la guerre froide en terme de théorie des jeux
  - Les stratégies sont l'attaque, l'armement nucléaire ou l'immobilisme
  - Un des équilibres est que les deux pays s'arment
  - Un équilibre plus surprenant est que les deux pays s'autodétruisent !

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu
Contexte historique

- XIX^{e} siècle : découverte de nouvelles géométries ne vérifiant pas l'axiome des parallèles

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu

Contexte historique

- XIX^{e} siècle : découverte de nouvelles géométries ne vérifiant pas l'axiome des parallèles
- Tentatives de fonder les mathématiques sur des bases solides et construction des réels

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu

Contexte historique

- XIX^{e} siècle : découverte de nouvelles géométries ne vérifiant pas l'axiome des parallèles
- Tentatives de fonder les mathématiques sur des bases solides et construction des réels
- Théorie des ensembles de Cantor construisant différents types d'infinis et apparition de paradoxes

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu
Contexte historique

- XIX^{e} siècle : découverte de nouvelles géométries ne vérifiant pas l'axiome des parallèles
- Tentatives de fonder les mathématiques sur des bases solides et construction des réels
- Théorie des ensembles de Cantor construisant différents types d'infinis et apparition de paradoxes
- Apparations de nouvelles philosophies

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu
Contexte historique

- XIX^{e} siècle : découverte de nouvelles géométries ne vérifiant pas l'axiome des parallèles
- Tentatives de fonder les mathématiques sur des bases solides et construction des réels
- Théorie des ensembles de Cantor construisant différents types d'infinis et apparition de paradoxes
- Apparations de nouvelles philosophies
    - logicisme (Frege, Russell)

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu
Contexte historique

- XIX^{e} siècle : découverte de nouvelles géométries ne vérifiant pas l'axiome des parallèles
- Tentatives de fonder les mathématiques sur des bases solides et construction des réels
- Théorie des ensembles de Cantor construisant différents types d'infinis et apparition de paradoxes
- Apparations de nouvelles philosophies
  - logicisme (Frege, Russell)
  - formalisme (Hilbert)

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu
Philosophie intuitionniste

- Les mathématiques sont une construction de la pensée

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu
Philosophie intuitionniste

- Les mathématiques sont une construction de la pensée
- Le langage trahit la pensée mathématique qui ne peut se résumer en un simple jeu logique

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu

Philosophie intuitionniste

- Les mathématiques sont une construction de la pensée
- Le langage trahit la pensée mathématique qui ne peut se résumer en un simple jeu logique
- L'intuition fondamentale de la notion de passé et de futur est à la base de la construction mathématique

Intuitionnisme et principe du tiers-exclu
Philosophie intuitionniste

- Les mathématiques sont une construction de la pensée
- Le langage trahit la pensée mathématique qui ne peut se résumer en un simple jeu logique
- L'intuition fondamentale de la notion de passé et de futur est à la base de la construction mathématique
- Tout objet mathématique doit être construit dans la pensée pour exister

Intuitionnisme et principe du tiers exclu
Conséquences

- Toute démonstration mathématique doit être constructive

Intuitionnisme et principe du tiers exclu
Conséquences

- Toute démonstration mathématique doit être constructive
- Les démonstations par l'absurde ne sont pas autorisées

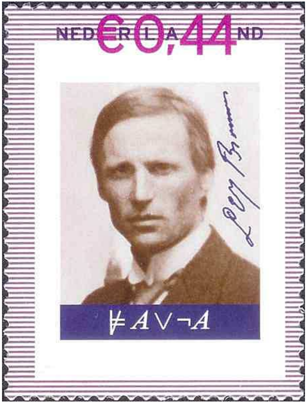
Intuitionnisme et principe du tiers exclu
Conséquences

- Toute démonstration mathématique doit être constructive
- Les démonstations par l'absurde ne sont pas autorisées
- Il faut donc abandonner le principe du tiers-exclu

Intuitionnisme et principe du tiers exclu

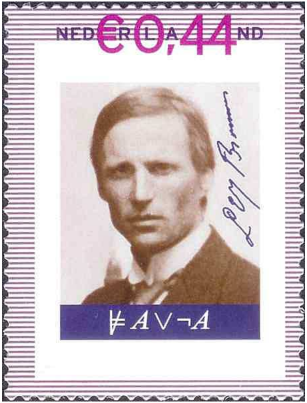
To be or not to be...

- *To be or not to be* veut dire qu'il n'y a que 2 possibilités être ou ne pas être



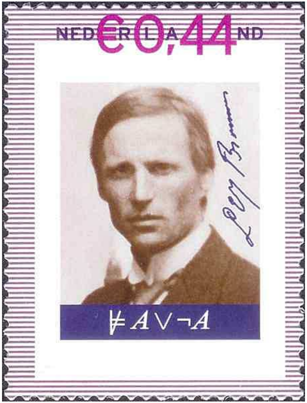
Intuitionnisme et principe du tiers exclu
To be or not to be...

- *To be or not to be* veut dire qu'il n'y a que 2 possibilités être ou ne pas être
- Notons A « être », $\neg A$ sa négation et $\vee$ la conjonction « ou »



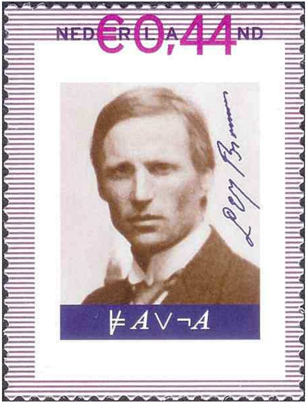
Intuitionnisme et principe du tiers exclu
To be or not to be...

- *To be or not to be* veut dire qu'il n'y a que 2 possibilités être ou ne pas être
- Notons A « être », $\neg A$ sa négation et $\vee$ la conjonction « ou »
- La fameuse phrase de Shakspeare peut s'écrire $A \vee \neg A$



Intuitionnisme et principe du tiers exclu
To be or not to be...

- *To be or not to be* veut dire qu'il n'y a que 2 possibilités être ou ne pas être
- Notons A « être », $\neg A$ sa négation et $\vee$ la conjonction « ou »
- La fameuse phrase de Shakspeare peut s'écrire $A \vee \neg A$
- Le principe du tiers exclu stipule que $A \vee \neg A$ est toujours vrai



Intuitionnisme et principe du tiers exclu
Logique intuitionniste

- Heyting va développer la logique intuitionniste en abandonnant un des principes de Brouwer

Intuitionnisme et principe du tiers exclu
Logique intuitionniste

- Heyting va développer la logique intuitionniste en abandonnant un des principes de Brouwer
- La logique intuitionniste ne se pose pas la question de savoir si un énoncé est vrai ou faux mais s'il est démontrable ou pas

Intuitionnisme et principe du tiers exclu

Logique intuitionniste

- Heyting va développer la logique intuitionniste en abandonnant un des principes de Brouwer
- La logique intuitionniste ne se pose pas la question de savoir si un énoncé est vrai ou faux mais s'il est démontrable ou pas
- Il faut également fournir une démonstration constructive

Intuitionnisme et principe du tiers exclu

Perspectives

- Gödel a montré que le programme de Hilbert était voué à l'échec

Intuitionnisme et principe du tiers exclu

Perspectives

- Gödel a montré que le programme de Hilbert était voué à l'échec
- Mais les mathématiques intuitionnistes sont trop contraignantes, il faut abandonner trop d'objets « confortables »

Intuitionnisme et principe du tiers exclu
Perspectives

- Gödel a montré que le programme de Hilbert était voué à l'échec
- Mais les mathématiques intuitionnistes sont trop contraignantes, il faut abandonner trop d'objets « confortables »
- Malgré tout, certains objets mathématiques du lycée obéissent à des règles intuitionnistes comme les intervalles ouvert de $\mathbb{R}$ (et leurs réunions et intersections)

Intuitionnisme et principe du tiers exclu

Perspectives

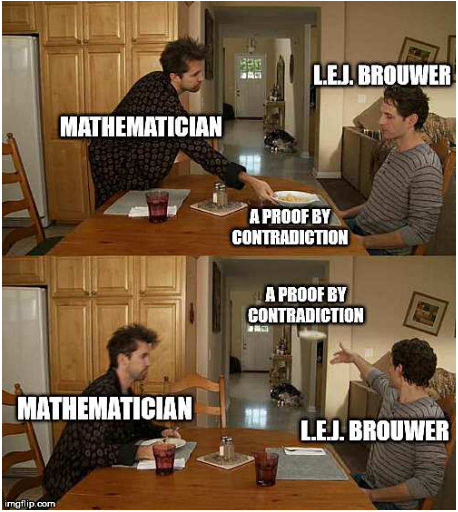
- Gödel a montré que le programme de Hilbert était voué à l'échec
- Mais les mathématiques intuitionnistes sont trop contraignantes, il faut abandonner trop d'objets « confortables »
- Malgré tout, certains objets mathématiques du lycée obéissent à des règles intuitionnistes comme les intervalles ouvert de $\mathbb{R}$ (et leurs réunions et intersections)
- Les mathématiques peuvent aujourd'hui se fonder sur la théorie des topos qui ont une logique sous-jacente intuitionniste

Intuitionnisme et principe du tiers exclu

Perspectives

- Gödel a montré que le programme de Hilbert était voué à l'échec
- Mais les mathématiques intuitionnistes sont trop contraignantes, il faut abandonner trop d'objets « confortables »
- Malgré tout, certains objets mathématiques du lycée obéissent à des règles intuitionnistes comme les intervalles ouvert de $\mathbb{R}$ (et leurs réunions et intersections)
- Les mathématiques peuvent aujourd'hui se fonder sur la théorie des topos qui ont une logique sous-jacente intuitionniste
- La logique intuitionniste a donné naissance au λ-calcul très utile dans les problèmes de calculabilité en informatiques et dans les démonstrations assistées par ordinateur

MERCI !


L.E.J. BROUWER
MATHEMATICIAN
A PROOF BY
CONTRADICTION
A PROOF BY
CONTRADICTION
MATHEMATICIAN
L.E.J. BROUWER
imgflip.com